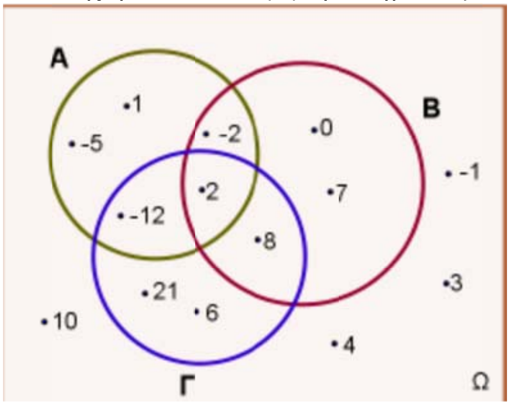
1ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΜΑ 1. (479)

α) Αν Α, Β, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:
i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2. (497)

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων
Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .
Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.
Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3. (499)

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:
Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και
Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) Β-Α iv) A' (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων
i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου
ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4. (1003)

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:
Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ
Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:
i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,
ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 5. (1102)

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες: $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(A-B)=\frac{5}{8}$ και $P(B)=\frac{1}{4}$.

α) Να υπολογίσετε την $P(A\cap B)$ (Μονάδες 9)

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β» . (Μονάδες 7)
ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6. (1287)

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.
Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:
Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)
Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)
Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7. (1506)

Δίνεται το σύνολο Ω={1,2,3,4,5,6} και τα υποσύνολά του Α={1,2,4,5} και Β={2,4,6}.

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω, τα σύνολα Α και Β. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα Α∪Β, Α∩Β, Α΄και Β΄ (Μονάδες 13)

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. (Μονάδες 4)
(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β. (Μονάδες 4)
(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 8. (1520)

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο
Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα
Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9. (3383)

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
   i) $A \cup M$ ii) Μ-Α iii) Μ΄ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :
   i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7)
   ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10. (3384)

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
   i) $A \cup B$ ii) Β-Α iii) Α΄ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:
   i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 9)
   ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 11. (3878)

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης (Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης. (Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης. (Μονάδες 10)

2Ο ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ 1. (486)
Αν $0<\alpha<1$, τότε
α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$ (Μονάδες 13)
β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0,\alpha^3,1,\alpha,\dfrac{1}{\alpha}$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2. (487)
α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς *x, y* ισχύει:
$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε τους αριθμούς *x, y* ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3. (504)
α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le-2$. (Μονάδες 15)
β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+|\frac{1}{\alpha}|\ge2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4. (506)
Αν $2\le x\le3$ και $1\le y\le2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $x+y$ (Μονάδες 5)
β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)
γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5. (509)
α) Αν α, β $\in\mathbb{R}$-{0}, να αποδειχθεί ότι: $|\frac{\alpha}{\beta}|+|\frac{\beta}{\alpha}|\ge2$ (1) (Μονάδες 15)
β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 6. (938)
α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7. (955)
Δίνονται οι αριθμοί: Α= $(\sqrt{2})^6$ και $\mathrm{B}=(\sqrt[3]{2})^6$
α) Να δείξετε ότι: $\mathrm{A}-\mathrm{B}=4$ (Μονάδες 13)
β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8. (991)
Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,
α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$ (Μονάδες 12)
β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9. (936)

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 10. (1009)

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11. (1070)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ,δ, με β≠0 και δ≠γ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι α=3β και δ=5γ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12. (1080)

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: y=2x. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A= \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13. (1089)

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x- 5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14. (1091)

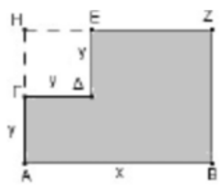
Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15. (1092)

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$ (Μονάδες 10) β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16. (1273)

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17. (1276)

Δίνεται η παράσταση: $K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 18. (1278)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 19. (1300)

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=(\sqrt{2})^6$, $B=(\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma=(\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 20. (1541)

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21. (2702)

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22. (3382)

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$. (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 23. (3852)
Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2\leq α\leq 4$ και $-4\leq β\leq -3$
Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
α) $α - 2β$ (Μονάδες 12)
β) $α^2 - 2αβ$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 24. (3870)
Δίνονται οι παραστάσεις: $Κ= 2α^2+β^2+9$ και $Λ=2α(3 - β)$, όπου $α, β\in\mathcal{R}$
α) Να δείξετε ότι: $Κ - Λ=(α^2+2αβ+β^2)+(α^2-6α+9)$ (Μονάδες 3)
β) Να δείξετε ότι: $Κ\geq Λ$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)
γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ=Λ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 25. (3874)
Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $α\neq β$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{α^2+1}{β^2+1}=\frac{α}{β}$
α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Κ = \frac{α^{22}(β^3)^8}{α^{-2}(αβ)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 26. (3884)
Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x , 3) = 3 – 2x$
α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)
β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $Κ = |2x − 3| − 2 |3 − x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 27. (4290)
Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$
α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)
β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $Κ = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 28. (4295)
Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.
α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)
β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $Κ = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 29. (4299)
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $y - x$ (Μονάδες 12)
β) $x^2 +y^2$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 30. (4311)

Δίνονται οι παραστάσεις: Α = $\sqrt{(x-2)^2}$ και Β = $\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει Α=Β. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31. (4314)

Αν είναι Α= $\sqrt[3]{5}$, Β= $\sqrt{3}$, Γ= $\sqrt[6]{55}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Α*Β*Γ $= \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 32. (4316)

Αν είναι Α= $2-\sqrt{3}$, Β= $2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Α·Β=1. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Π = A^2+B^2. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 33. (7519)

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με α > 0 και β > 0. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $(\alpha+\frac{4}{\alpha})(\beta+\frac{4}{\beta}) \geq 4$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 34. (7520)

Δίνονται οι παραστάσεις: Κ= $2\alpha^2+\beta^2$ και Λ=2αβ, όπου α, β$\in\mathcal{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ=Λ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 35. (8173)

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, $\sqrt{7} \cong 2{,}64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$ (Μονάδες 13)

3ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1. (481)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 -2λx + 4(λ-1) =0$, με παράμετρο $λ\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $λ\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 =x_1 x_2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2. (482)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2λx +λ - 2 = 0$, με παράμετρο $λ \in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $λ \in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $λ$ ισχύει: $x_1 + x_2 = -x_1\ x_2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3. (483)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x -1 | = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $αx^2 +βx+3=0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4. (485)

Δίνεται η εξίσωση $λx=x+λ^2-1$, με παράμετρο $λ \in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(λ-1)x=(λ-1)(λ+1)$, $λ \in\mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $λ$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $λ$ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5. (493)

α) Να λύσετε την εξίσωση $| x- 2 |= \sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 6. (496)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 +2λx +4(λ-1)=0$, με παράμετρο $λ \in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $λ \in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $λ$ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 + x_1\ x_2 +5 =0$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7. (507)

Δίνεται η εξίσωση: $(λ^2- 9)\ x =λ^2 - 3\ λ$, με παράμετρο $λ \in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 8. (1007)

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9. (1055)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 10. (1093)

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$,$B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α , Β. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 11. (1097)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ (Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12. (1275)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, $x1$ και $x2$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$ και $\frac{1}{x1}+\frac{1}{x2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x1}$ και $\frac{1}{x2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13. (1281)

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=(\sqrt{3}+1)^2$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14. (1298)
Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $α+β=2$ και $α^2β+αβ^2=-30$
α) Να αποδείξετε ότι: $α\cdotβ = -15$. (Μονάδες 10)
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 15. (1509)
Δίνεται η εξίσωση $x^2-(λ-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $λ\in\mathbb{R}$.
α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1,να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)
β) Για λ=2 να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 16. (3839)
Δίνεται η εξίσωση: $λx^2 - (λ-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $λ\neq 0$.
α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 . (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $λ\neq 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17. (3857)
Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $α\cdotβ=4$ και $α^2β+αβ^2=20$
α) Να αποδείξετε ότι: $α+β = 5$. (Μονάδες 10)
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β, και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 18. (3863)
Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:
$α+β = -1$ και $α^3β + 2α^2β^2 + αβ^3 = -12$
α) Να αποδείξετε ότι: $α\cdotβ = -12$. (Μονάδες 10)
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 19. (4302)
Δίνεται η εξίσωση: $(α+3)x = α^2 - 9$, με παράμετρο $α \in\mathcal{R}$.
α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
i) όταν $α = 1$ (Μονάδες 5)
ii) όταν $α = -3$ (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 20. (4308)
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $Π = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)
β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:
$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21. (4309)
Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $Π = 20cm$ και εμβαδό $Ε = 24cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22. (4310)

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$. (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α ,β. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23. (4313)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A+B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 24. (7518)

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathcal{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $\kappa \in \mathcal{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

   i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

   ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 12)

4ο ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1. (478)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2+\lambda-1) = 0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2. (484)

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2-x-1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3. (489)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4. (490)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5. (491)

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 6. (498)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 7. (503)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| < 4$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 8. (505)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 9. (1039)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς *x* που απέχουν από το *5* απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10. (1062) & (1074)

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x,*y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού *Ε* του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11. (1074)(1062)

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<Π<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12. (1077)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13. (1277)

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14. (1288)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A= |x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 15. (1288)

ΘΕΜΑ 86)1297)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\leq 0$. (Μονάδες 12) β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16. (1305)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α ≥-1, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17. (1512)

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18. (1533)

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1 , x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1 x_2 - 2(x_1+x_2)=1$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 19. (1544)

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:
$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20. (3380)

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 21. (3847)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 22. (4305)

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23. (4306)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 24. (4317)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 25. (4318)

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, x, x^2
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26. (7521)

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:
   i) $|1 - 2x| < 5$ και (Μονάδες 9)
   ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

5ο ΠΡΟΟΔΟΙ

ΘΕΜΑ 1. (473, 474)

Θεωρούμε την ακολουθία ($α_ν$) των θετικών περιττών αριθμών: 1,3,5,7,…

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η ($α_ν$) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2. (480)

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει ***α*** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3. (495)

Σε γεωμετρική πρόοδο (αν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $α_ν=2^{ν-3}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4. (508)

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5. (1015)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και $α_1$ ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 6. (1032)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, 2x+1, 5x+4, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) x=1

ii) x= -1 (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7. (1050)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x + 2$, $(x + 1)^2$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) x=1

ii) x= -1. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8. (1057)

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9. (1064)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20} . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10. (1086)

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν x=1 και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11. (1088)

α) Αν οι αριθμοί 4–x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί 4–x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί 4–x, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12. (1100)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) , με παράμετρο β>0.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β , x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13. (1101)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: x_1 = β-2 και x_2 = β+2 (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1,β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14. (1301)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω=5. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15. (1513)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (αν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16. (3828)

Οι αριθμοί κ-2, 2κ και 7κ+4, κ $\varepsilon\ \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι κ=4 και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17. (4288)

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί x+4, 2-x, 6-x με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν x=5 και ο 6-x είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 18. (4300)

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 19. (4301)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 20. (4303)

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21. (4304)

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω = 4, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12) β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 22. (4312)

Οι αριθμοί x+6, 5x+2, 11x-6 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι α_1=0, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 23. (4315)

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha 5}{\alpha 2}$ = 27.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 24. (4319)

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι α_1 = 2 και α_5 = 14.

α) Να αποδείξετε ότι ω=3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849}$ = 43). (Μονάδες 13)

6^{ο} ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1. (477)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2. (488)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3. (492)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4. (494)

Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι (x+1) και x, με x>0.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90m^2, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5. (510)

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές f(-1), f(3) και f(5). (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 25. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6. (936)

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7. (944)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για x=5, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8. (947)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2\ (10 - \sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9. (950)

Δίνεται η παράσταση: A= $\sqrt{1-x}$ - $\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν x= -3, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10. (952)

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για x=4, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 11. (999)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12. (1005)

Δίνονται οι παραστάσεις A= $\frac{1+x}{x-1}$ και B = $\frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13. (1024)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = αx+β, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 6), Β(-1, 4), να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13) β) Αν α=1 και β=5, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x’x και y’y. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14. (1042)

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι f(-1)= f(3) (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: f(x)=0 (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15. (1067)

Δίνεται η παράσταση: $K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16. (1082)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: f(2)+f(4)=0. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 17. (1090)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M(a,\frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 18. (1096)

Η απόσταση y *(σε χιλιόμετρα)* ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: y=35+0.8x

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 19. (1282)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση: $A(x)=\frac{X-1}{3X^2-2X-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)|=1$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20. (1283)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3 (Μονάδες 8) β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{X^2+2X-3}{X-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 21. (1293)

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: Τ=15+25·x, όταν 0≤x≤200

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22. (1302)

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 8-x & \alpha\nu\ x<0 \\ 2x+5 & \alpha\nu\ x\geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 23. (1529)

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αx+β, με α, β ε$\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: f(0)=5 και f(1)=3.

α) Να δείξετε ότι α=-2 και β=5. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x'x και y'y. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 24. (1532)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2+4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 25. (1537)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: Α= $f(\frac{1}{2})+f(1)-f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 26. (1542)

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: Α=x^3-x^2+3x-3. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=$\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1, 3). (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 27. (1553)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, x∈ℛ

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 28. (2212)

Δίνεται η συνάρτηση f, με f(x)=$\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι f(x)=|x|, για κάθε x∈Α (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για x>0. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 29. (3378)

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

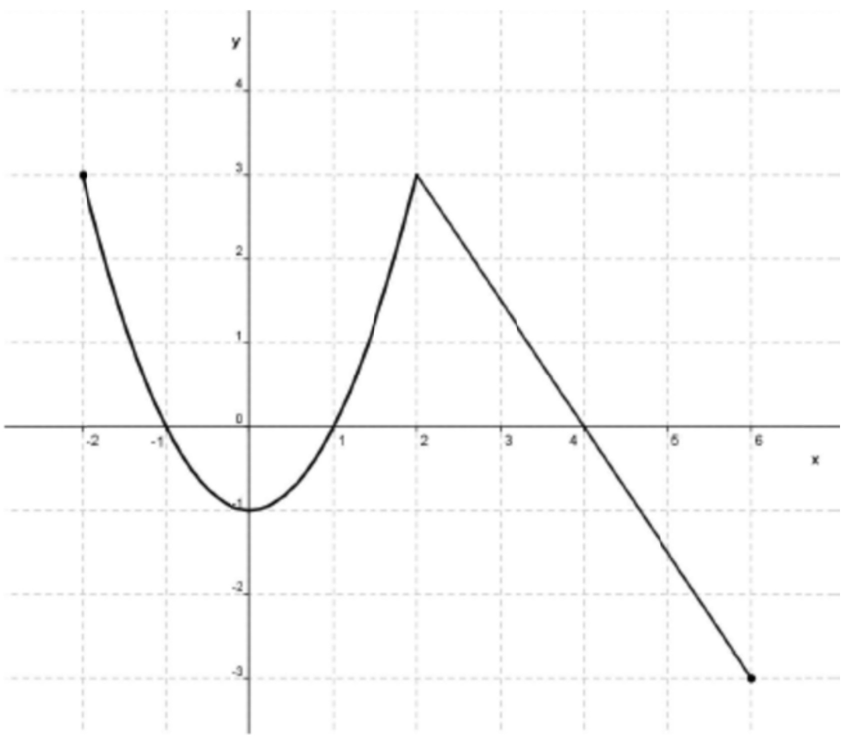
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

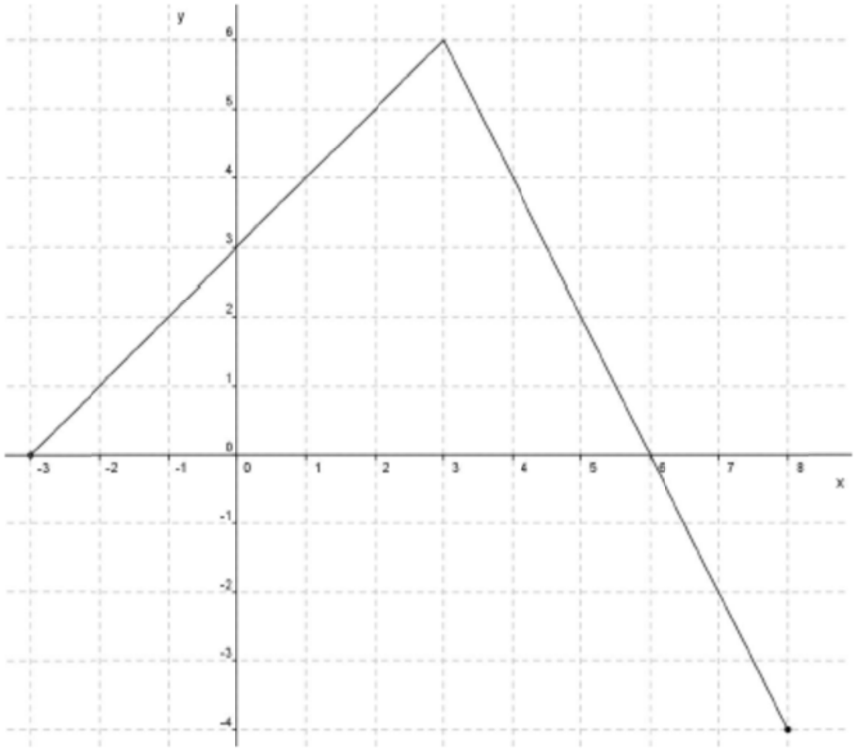
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 30. (3379)



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 31. (3381)

Δίνεται η συνάρτηση g, με g(x)= $\frac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(1,- 4),

α) να δείξετε ότι μ= -6. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για μ= -6 να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)